Sistemas de numeração

Víctor Hugo Alvarez V.

Gustavo Adolfo Moysés Alvarez

Possivelmente a preocupação primordial de hominídeos foram as contagens. Mais tarde foram o registro dos valores. Os povos primitivos contam 1, 2, 3 e muitos; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e muitos. As numerações são artefatos do intelecto dos *Homo sapiens sapiens*. Não fazem parte da sua herança genética. Mas fazem parte da herança cultural, ao longo de muitas civilizações.

Nas unidades s^{-1}, cm^{-1}, m^{-2}, que está faltando? Faltam os números.

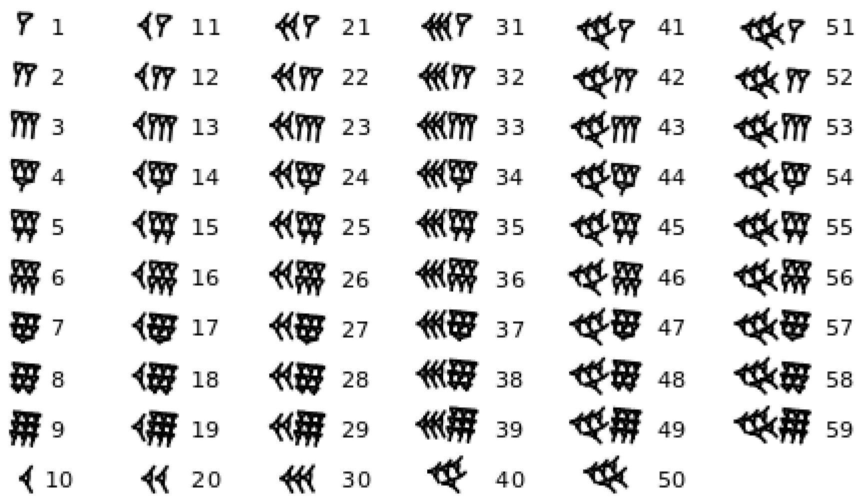
Nos números em francês: 0, 1, …,60, ...,70, ...,79, 80, ...,90, ...,99, 100 têm os nomes de zéro, un, ...,soixante, ...,soixante-dix ,…,soixante-dix-neuf, quatre-vingt,.., quatre-vingt-dix,.., quatre-vingt-dix-neuf, cent. Qual a origem destes nomes? Supomos que seja herança de sumérios e babilônios.

Numerais babilônicos

Os babilônios tinham escrita cuneiforme e um sistema de numeração posicional (a primeira) herdada de Sumérios e Acadianos (3100 aC). Era um sistema sexagesimal.

Possivelmente, foi escolhido 60 por sua rica fatoração primaria: 2 × 2 × 3 × 5, por ser divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 20 e 30 e por ser o menor número inteiro divisível por todos os números inteiros de 1 a 6.

Utiliza dois símbolos básicos 𒁹 e 𒌋 para 1 e para 10. Combinando estes dois símbolos, tem-se para a primeira posição os números de 1 a 59:



O sistema sexagesimal tem para 1, 10 e 59 os seguintes valores de acordo com o seu posicionamento (casa numérica):

Casa	𒁹		𒌋	
5ª	12 960 000	60^4	129 600 000	764 640 000
4ª	216 000	60^3	2 160 000	12 744 000
3ª	3 600	60^2	36 000	212 400
2ª	60	60^1	600	3 540
1ª	1	60^0	10	59

O posicionamento horizontal dos símbolos das casas da 1ª a 5ª se apresentam de esquerda à direita na ordem das casas 5ª a 1ª da seguinte forma:

| …. | | 𒁹 12 960 000 (60^4) ;764 640 000 | | 𒁹 216 000 (60^3) ; 12 744 000 |

| 𒁹 3 600 (60^2) ; 212 400 | | 𒁹 60 (60^1) ;3 540 | | 𒁹 1 (60^0) ;59 |.

Pelo posicionamento 𒁹 vale: 1, 60, 3 600, 216 000, 12 690 000, etc.

Para escrever o número 15 282 660, utilizando somas e restas com os valores da tabela anterior e considerando que este número atinge a 5ª casa:

15 282 660 – 12 960 000 = 2 322 660 → **1** 𒁹 na 5ª casa
2 322 660 – 2 160 000 = 162 660 → 1 𒌋 na 4ª casa
162 660 – 162 000 = 660 → **4** 𒌋 e **5** 𒁹 na 3ª casa
660 – 660 = 0 → **1** 𒌋 e **1** 𒁹 na 2ª casa
0 – 0 = 0 → | | na 1ª casa

Este número se escreve da seguinte forma:

Para escrever o número 15 282 660, neste sistema numérico, fica mais fácil realizar as seguintes divisões:

15 282 660 / 60 = 254 711 res **0**
254 711 / 60 = 4 245 res **11**
4 245 / 60 = 70 res **45**
70 / 60 = 1 res **10**
1 / 60 = 0 res **1**; e trabalhar com os resíduos:

|**1** × 60^4||**10** × 60^3||**45** × 60^2||**11** × 60^1||**0** × 60^0| = 1 × 12 960 000 + 10 × 216 000 + 45 × 3 600 + 11 × 60 + 0 × 1 = 12 960 000 + 2 160 000 + 162 000 = 660 + 0 = 15 282 660.

Inicialmente, por falta de símbolo para **0** deixava-se um espaço na primeira casa dos números, posteriormente foi utilizado o símbolo .

Do sistema sexagesimal derivam:

Para ângulos:
60 × 6 = 360 °, divididos em 60' e os ' em 60''

Para tempo:
60 / 5 = 12 (12 h de dia e 12 h de noite, no equinócio) → 24 h; divididas em 60 min e os min em 60 s. Por ex. 3: 15: 20 = 3 h; 15 min; 20 s = 3 + 15 / 60 + 20 / 3 600 = 3 + 0,25 + 0,005555 = 3,255555 h = 11 720 s.

Para moedas:
60 / 3 = 20 → moedas antigas de prata brasileiras de 20 (vintém), 80 (tostão), 320 (pataca), 480 (cruzado), 960 (patacão), 1 600 (escudo) réis.

Para comprimento:
60 / 5 = 12 → 12, 36, 792, 63 360, 190 080 polegadas são o pé, a jarda, a corrente, a milha, a légua, respectivamente.

Para números:
60 / 6 = 10 → sistemas de Egito antigo, Grécia, Roma e Hindu–Arábico, que eram decimais. O sistema egípcio não tinha posicionamento, os da Grécia, Roma, tinham posicionamento. Os três sistemas não utilizavam o zero, já o sistema hindu - arábico, conhecia e introduziu, tardiamente, o zero em Europa.

O sistema de numeração do Egito antigo era pictográfico como sua escrita.

O sistema de numeração grego, desde o período Micénico era em base 10 e utilizava caracteres alfabéticos.

UNIDADES				DEZENAS				CENTENAS			
Α	α	alfa	1	Ι	ι	iota	10	Ρ	ρ	rô	100
Β	β	beta	2	Κ	κ	kapa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gama	3	Λ	λ	lambda	30	Τ	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	Μ	μ	mu	40	Υ	υ	upsilon	400
Ε	ϵ	epsilon	5	Ν	ν	nu	50	Φ	ϕ	phi	500
Ϝ	ϛ	digama	6	Ξ	ξ	ksi	60	Χ	χ	khi	600
Ζ	ζ	zeta	7	Ο	ο	ômicron	70	Ψ	ψ	psi	700
Η	η	eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	ômega	800
Θ	θ	teta	9	Ϙ	ϙ	kopa	90	Ͳ	ϡ	san	900

Para nosso exemplo 15 282 660 seria: ‚‚ι‚‚ε‚σ‚π‚β χ ξ.

O sistema de numeração romano, até mil utiliza, I, V, X, L, C, D e M. Para números acima de mil: MM, MMM, IV, V, VI,.., IX, X, C, D, CM. Acima de milhão, M.

Para nosso exemplo: $\overline{\text{XV}}$ CCLXXXII DCLX.

O sistema de numeração hindu- arábico tem 0 e posicionamento. Como é sistema decimal, utiliza 10 símbolos: ٩, ٨, ٧, ٦, ٥, ٤, ٣, ٢, ١, e ٠, que correspondem a nossos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, mas em direção oposta.

O sistema decimal e seu posicionamento é:

$|\ldots||1\ 000\ 000\ (10^6);\quad 9\ 000\ 000||100\ 000\ (10^5);\quad 900\ 000||10\ 000\ (10^4);\quad 90\ 000|$

$|1\ 000\ (10^3);\quad 9\ 000||100\ (10^2);\quad 900||10\ (10^1);\quad 90||1\ (10^0);\quad 9|.$

Para nosso exemplo, 15 282 660:

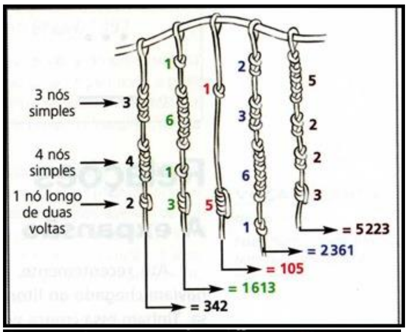
15 282 660 / 10 =	1 528 266 res **0**	→ 1ª casa	
1 528 266 / 10 =	152 828 res **6**	→ 2ª casa	
152 828 / 10 =	15 282 res **6**	→ 3ª casa	
15 282 / 10 =	1 528 res **2**	→ 4ª casa	
1 528 / 10 =	152 res **8**	→ 5ª casa	
152 / 10 =	15 res **2**	→ 6ª casa	
15 / 10 =	1 res **5**	→ 7ª casa	
1 / 10 =	0 res **1**	→ 8ª casa	de direita a esquerda.

$|\mathbf{1} \times 10^7||\mathbf{5} \times 10^6||\mathbf{2} \times 10^5||\mathbf{8} \times 10^4||\mathbf{2} \times 10^3||\mathbf{6} \times 10^2||\mathbf{6} \times 10^1||\mathbf{0} \times 10^0| =$

10 000 000 + 5 000 000 + 200 000 + 80 000 + 2 000 + 600 + 60 + 0 =

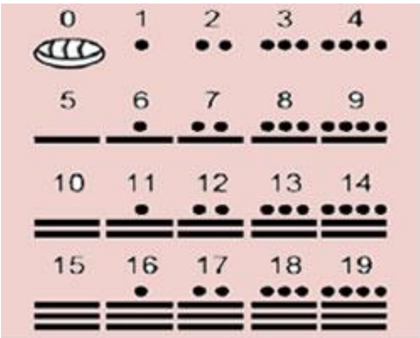
15 282 660.

Na américa pré-colombiana, os Incas utilizaram o sistema decimal com posicionamento, mas sem ter desenvolvido a escrita. Eles utilizaram, para contas e registros, a manipulação dos quipus, que são nós em cordas.



Este conhecimento permitiu o recenseamento constante de reservas de alimentos e das populações.

Por outro lado os Maias tinham escrita e um sistema de numeração vigesimal. Os números 4, 5 e 20 eram de grande importância para os Maias, pois eles tinham a ideia de que 5 forma uma unidade (a mão) e a soma de 4 unidades de 5 forma uma pessoa (20 dedos). O sistema tem posicionamento organizado em casas numéricas (na vertical) e utilizavam um símbolo para zero, para mostrar o valor nulo. Utilizavam unicamente três símbolos, correspondentes a 0, 1 e 5: , e . Pela agrupação dos símbolos e tem-se os números de 1 a 19:



é a representação de uma conchinha.

O sistema vigesimal Maia tem o seguinte posicionamento, com os valores correspondentes a , e para cada casa:

Casa				
6ª	3 200 000	(**20^5**)	16 000 000	60 800 000
5ª	160 000	(**20^4**)	800 000	3 040 000
4ª	8 000	(**20^3**)	40 000	152 000
3ª	400	(**20^2**)	2 000	7 600
2ª	20	(**20^1**)	100	380
1ª	1	(**20^0**)	5	19

Para escrever o número 15 282 660, utilizando somas e restas com os valores da tabela anterior e considerando que este número atinge a 6ª casa:

6ª casa → 15 282 660 – 4 × 3 200 000 ( ) = 2 482 660

5ª casa → 2 482 660 – 3 × 800 000 ( ) = 82 660

4ª casa → 82 660 – 2 × 40 000 ( ) = 2 660

3ª casa → 2 660 – 2 000 – 400 ( ) = 260

2ª casa → 260 – 200 – 60 ( ) = 0

1ª casa → 0 – 0 ( ) = 0

Para escrever o número 15 282 660 com os símbolos dentro das respectivas casas fica mais fácil realizar as seguintes divisões:

15 282 660 / 20 =	764 133 res **0**;	**4** $\times 20^5$ = 12 800 000	→ 6ª casa
764 133 / 20 =	38 206 res **13**;	**15** $\times 20^4$ = 2 400 000	→ 5ª casa
38 206 / 20 =	1 910 res **6**;	**10** $\times 20^3$ = 80 000	→ 4ª casa
1 910 / 20 =	95 res **10**;	**6** $\times 20^2$ = 2 400	→ 3ª casa
95 / 20 =	4 res **15**;	**13** $\times 20^1$ = 260	→ 2ª casa
4 / 20 =	0 res **4**;	**0** $\times 20^0$ = 0	→ 1ª casa

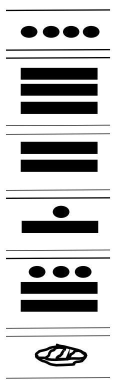
Isto implica em decorar os valores de 20^k, sendo k o # de Casas

Mais fácil é considerar 20^k como $2^k \times 10^k$. Assim para • e para ▬ temos:

# Cs	•	▬
	$\mathbf{20^k} = 2^k \times 10^k$	$\mathbf{5 \times 20^k} = 2^{k-1} \times 10^c$
11ª	$\mathbf{20^{10}} = 2^{10} \times 10^{10}$	$\mathbf{5 \times 20^{10}} = 2^9 \times 10^{11}$
10ª	$\mathbf{20^9} = 2^9 \times 10^9$	$\mathbf{5 \times 20^9} = 2^8 \times 10^{10}$
9ª	$\mathbf{20^8} = 2^8 \times 10^8$	$\mathbf{5 \times 20^8} = 2^7 \times 10^9$
8ª	$\mathbf{20^7} = 2^7 \times 10^7$	$\mathbf{5 \times 20^7} = 2^6 \times 10^8$
7ª	$\mathbf{20^6} = 2^6 \times 10^6$	$\mathbf{5 \times 20^6} = 2^5 \times 10^7$
6ª	$\mathbf{20^5} = 2^5 \times 10^5$	$\mathbf{5 \times 20^5} = 2^4 \times 10^6$
5ª	$\mathbf{20^4} = 2^4 \times 10^4$	$\mathbf{5 \times 20^4} = 2^3 \times 10^5$
4ª	$\mathbf{20^3} = 2^3 \times 10^3$	$\mathbf{5 \times 20^3} = 2^2 \times 10^4$
3ª	$\mathbf{20^2} = 2^2 \times 10^2$	$\mathbf{5 \times 20^2} = 2^1 \times 10^3$
2ª	$\mathbf{20^1} = 2^1 \times 10^1$	$\mathbf{5 \times 20^1} = 2^0 \times 10^2$
1ª	$\mathbf{20^0} = 2^0 \times 10^0$	$\mathbf{5 \times 20^0} = 2^{-1} \times 10^1$

Para •, k é o expoente da série vigesimal. E para ▬, k é o expoente da série vigesimal e c é o número da casa de posicionamento.

Com o sistema de numeração Maia 15 282 660 escreve-se assim:



Observar que os sistemas de numeração se caracterizam pela base da serie de potenciação, nos exemplos apresentados, sexagesimal, decimal e vigesimal e, pelo posicionamento e pelos símbolos utilizados.

Chama a atenção que muitas civilizações que tinham a noção do nada não tenham inventado um símbolo para 0, e, que a civilização Maia utilizava o 0 em época contemporânea à utilização do zero pelos hindus.

Víctor Hugo Alvarez V. é professor do Departamento de Solos da Universidade Federal de Viçosa

Gustavo Adolfo Moysés Alvarez é professor na Escola Lapan, São Paulo